Ορισμός

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ με παράμετρο το μήκος τόξου. Ονομάζουμε γεωδαισιακή καμπυλότητα της c την συνάρτηση

$$K_g = \left[\frac{D\dot{c}}{ds}\right] = \langle \ddot{c}, N\times\dot{c}\rangle \quad , \quad K_g: I\to\mathbb{R}$$

Προφανώς, V παράλληλο αν.ν $\left[\frac{DV}{dt}\right]=0$

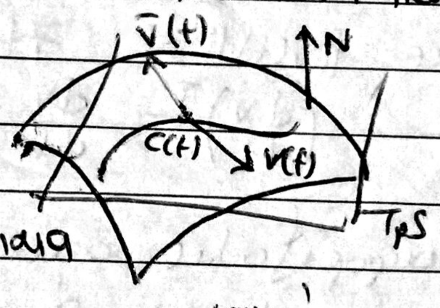
Συμπέρασμα:

Η καμπύλη $c: I\to S$ με παράμετρο το μήκος τόξου είναι γεωδαισιακή αν.ν $K_g=0$
(Μια αναλογία όπως και στις ευθείες στο επίπεδο)

Στόχος: Υπολογισμός γεωδαισιακής καμπυλότητας

Προεργασία:

Έστωσαν $V, W: I\to\mathbb{R}^3$ μοναδιαία διαν. πεδία κατά μήκος της c. $\varphi(t) = \measuredangle(V(t), W(t))$..



Ορίζουμε το δ.π $\bar{V}: I\to\mathbb{R}^3$ κατά μήκος της c $\quad \bar{V} = N\times V$

Τότε $\forall t\in I$ $\{V(t), \bar{V}(t)\}$ ορθομοναδιαία βάση του $T_{c(t)}S$

$W(t) = a(t)V(t) + b(t)\bar{V}(t)$, $a(t), b(t)$ λείες $\left(\text{αφού } \begin{array}{l} a(t)=\langle W(t),V(t)\rangle \\ b(t)=\langle W(t),\bar{V}(t)\rangle \end{array}\right)$

$\|W(t)\|=1 \iff a^2(t)+b^2(t)=1$

Από το $1^{ο}$ λήμμα. Θα $\exists \varphi: a(t)=\cos\varphi(t)$ & $b(t)=\sin\varphi(t)$ και $\varphi(t_0)=\varphi_0$. Άρα, $\varphi(t)=\measuredangle(V(t),W(t))$.

ΛΗΜΜΑ:

Για τα παραπάνω δεδομένα ισχύει:

$$\left[\frac{DW}{dt}\right] - \left[\frac{DV}{dt}\right] = \frac{d\varphi}{dt} \quad , \quad \varphi = \measuredangle(V,W)$$

Απόδειξη

$$\left[\frac{Dv}{dt}\right] = \left\langle \frac{dv}{dt}, N\times v \right\rangle = \langle v', \bar{v} \rangle$$

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \left\langle \frac{dw}{dt}, N\times w \right\rangle = \langle w', \bar{w} \rangle$$

$w := \cos\varphi\, v + \sin\varphi\, \bar{v}$

$\bar{w} := N\times w = N\times(\cos\varphi\, v + \sin\varphi\, \bar{v}) = \cos\varphi\, \bar{v} + \sin\varphi\, N\times\bar{v} =$

$= \bar{v} + \sin\varphi\, N\times(N\times v) = \bar{v} + \sin\varphi\,(\cancel{\langle N, v\rangle N} - \langle N, N\rangle v)$

Άρα, $\bar{w} = \cos\varphi\, \bar{v} - \sin\varphi\, v$

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \langle -\varphi'\sin\varphi\, v + \cos\varphi\, v' + \varphi'\cos\varphi\, \bar{v} + \sin\varphi\, \bar{v}', \cos\varphi\, \bar{v} - \sin\varphi\, v \rangle =$$

$$= +\varphi'\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \langle v', \bar{v}\rangle + \varphi'\cos^2\varphi - \sin\varphi \langle \bar{v}', v\rangle \quad (1)$$

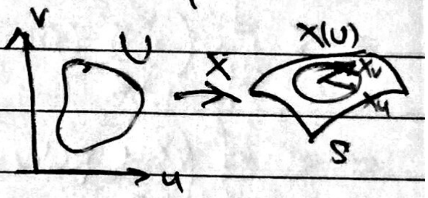
$\langle v, \bar{v}\rangle = 0 \Rightarrow \langle v', \bar{v}\rangle + \langle v, \bar{v}'\rangle = 0$

Άρα, η (1) γίνεται

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \varphi' + \langle v', \bar{v}\rangle = \varphi' + \left[\frac{Dv}{dt}\right].$$

Ορίζουμε:

Ο Πίνακας της I Θεμελιώδους μορφής ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ είναι ο εξής:



$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \|X_u\|^2 & \langle X_u, X_v\rangle \\ \langle X_u, X_v\rangle & \|X_v\|^2 \end{pmatrix}$$

Το X λέγεται ορθογώνιο $\Leftrightarrow F=0$

Θεώρημα

Για κάθε σημείο $p\in S$, υπάρχει ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $X: U\to X(U)\subset S$ με $p\in X(U)$.

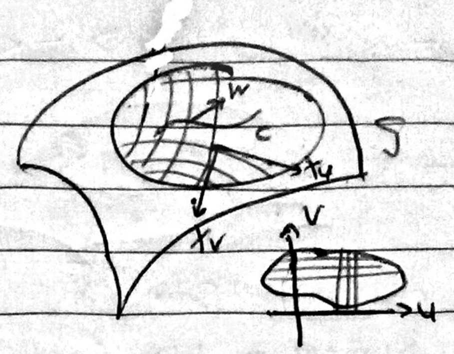
Επίσης, αν S προσανατολισμένη με απεικόνιση Gauss $N: S\to S^2$

τότε το X μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε

$$N\circ X = \frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|} \quad \leftarrow (\text{προσανατολισμός της } S)$$

Πρόταση

Έστω $X: U\to X(U)$ ορθογώνιο σύστημα συντεταγμ. του προσανατολισμού της S, $c: I\to X(U)$ καμπύλη με $c(t) = X(u(t), v(t))$ και w μοναδ. δ.π κατά μήκος επί c. Τότε,



$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\frac{dv}{dt} - E_v\frac{du}{dt}\right\} + \frac{d\varphi}{dt}$$

όπου $\varphi = \measuredangle(X_u, W) = \measuredangle(e_1, W)$

Απόδειξη

$e_1 = \frac{X_u}{\sqrt{E}}$ & $e_2 = \frac{X_v}{\sqrt{G}}$, $N \circ X = e_1 \times e_2$

από το λήμμα

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] - \left[\frac{De_1}{dt}\right] = \frac{d\varphi}{dt} \Leftrightarrow \left[\frac{Dw}{dt}\right] = \left[\frac{De_1}{dt}\right] + \frac{d\varphi}{dt}$$

Αρκεί να βρούμε το $\left[\frac{De_1}{dt}\right]$

$$\left[\frac{De_1}{dt}\right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \times e_1 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{X_u}{\sqrt{E}}(u(t), v(t))\right), (e_1 \times e_2) \times e_1 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{X_u}{\sqrt{E}}(u(t), v(t))\right), e_2 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{X_u}{\sqrt{E}}(u(t), v(t))\right), \frac{X_v}{\sqrt{G}}(u(t), v(t)) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG}}\left\langle u' X_{uu}(u(t), v(t)) + v' X_{uv}(u(t), v(t)), X_v(u(t), v(t)) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{ u'\langle X_{uu}, X_v\rangle + v'\langle X_{uv}, X_v\rangle \right\} \quad (1)$$

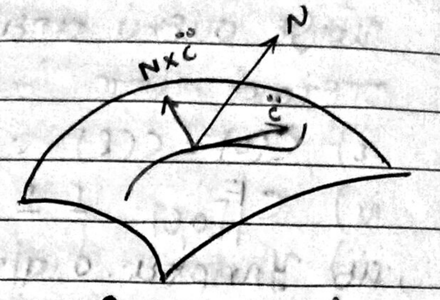
$$\langle X_{uu}, X_v\rangle = \cancel{\langle X_u, X_v\rangle_u}^{0} - \langle X_u X_{vu}\rangle = -\frac{1}{2}\langle X_u, X_u\rangle_v = -\frac{1}{2}E_v$$

όμοια και το $\langle X_{uv}, X_v\rangle = \frac{1}{2}G_u$

Για τα ίδια δεδομένα με την προεργασία αλλά η c να έχει παράμετρο το μήκος τόξου $c(s) = X(u(s), v(s))$

Τότε,
$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi}{ds}, \quad \varphi = \sphericalangle(X_u, \dot{c})$$

Ας υποθέσουμε $c : I \to S$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος του τόξου της, καμπυλότητα k ως καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ και γεωδαισιακή καμπυλότητα k_g.



$\{\dot{c}, N\times\dot{c}, N\}$ ορθ. βάση του $\mathbb{R}^3$.

$$k_g = \left[\frac{D\dot{c}}{ds}\right] = \langle \ddot{c}, N\times\dot{c} \rangle, \quad \|\ddot{c}\| = k$$

$$\ddot{c} = (\ddot{c})^T + \langle \ddot{c}, N\rangle N = \cancel{\langle \ddot{c}, \dot{c}\rangle}^{0} \dot{c} + \langle \ddot{c}, N\times\dot{c}\rangle N\times\dot{c} + \langle \ddot{c}, N\rangle N$$
$$\ddot{c} = \langle \ddot{c}, N\times\dot{c}\rangle N\times\dot{c} + \langle \ddot{c}, N\rangle N \quad (1)$$

Αφού $\langle \ddot{c}, N\circ c\rangle = (\langle \dot{c}, N\circ c\rangle)' - \langle \dot{c}, (N\circ c)'\rangle = -\langle \dot{c}, dN(\dot{c})\rangle =$
$= \langle \dot{c}, L\dot{c}\rangle = II(\dot{c}) = k_n(\dot{c})$

Έτσι, $\boxed{k^2 = k_g^2 + k_n^2(\dot{c})}$

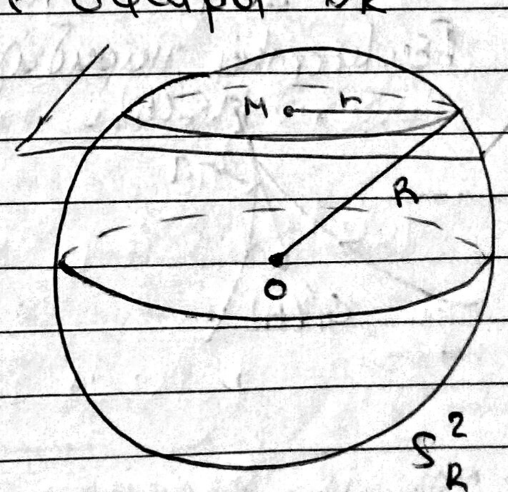
Παράδειγμα

Γεωδαισιακή καμπυλότητα κύκλων σε σφαίρα S_R^2

$k = \frac{1}{r}, \quad k_n = \frac{1}{R}$

$$\frac{1}{r^2} = k_g^2 + \frac{1}{R^2} \Rightarrow k_g = \pm\sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}} \Leftrightarrow$$

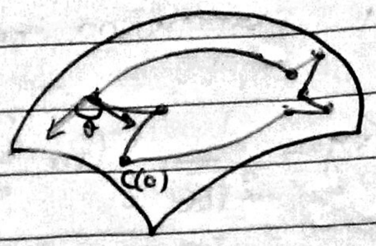
$$k_g = \pm\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2 \cdot r^2}} = \pm\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R\cdot r}$$



Άρα συμπέρασμα μας είναι ότι
Η καμπύλη c γεωδαισιακή $\Leftrightarrow k_g = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R = r \Leftrightarrow$ c μεγ. κύκλος

Απλές κλειστές κατά τμήματα κανονικές καμπύλες επιφάνειας S

Ορισμός



Ονομάζουμε απλή κλειστή κατά τμήματα κανονική καμπύλη της S κάθε συνεχή απεικόνιση $c:[0,l]\to S$ τέτοια ώστε

i) $c(0)=c(l)$

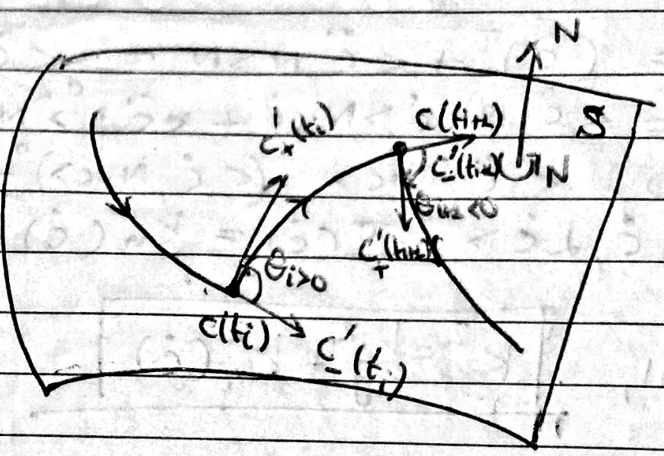
ii) $c|_{[0,l)}$ 1-1

iii) Υπάρχει διαμέριση $\{0=t_0<t_1<\dots<t_k=l\}$ τ/ω $\forall i\in\{0,1,\dots,k\}$ η $c|_{[t_{i-1},t_i]}$ να είναι κανονική καμπύλη

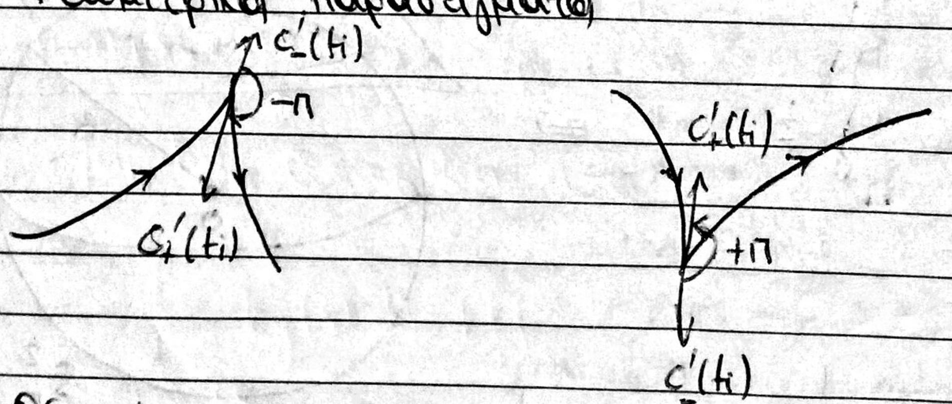
Τα σημεία $c(t_0), c(t_1), \dots$ καλούνται κορυφές της c

Εξωτερικές γωνίες

Η εξωτερική γωνία στην κορυφή $c(t_i)$ είναι η γωνία $\theta_i\in[-\pi,\pi]$ κατά την οποία πρέπει να στρέψουμε το $c'_-(t_i)$ ώστε να συμπέσει με το $c'_+(t_i)$



Γεωμετρικά παραδείγματα



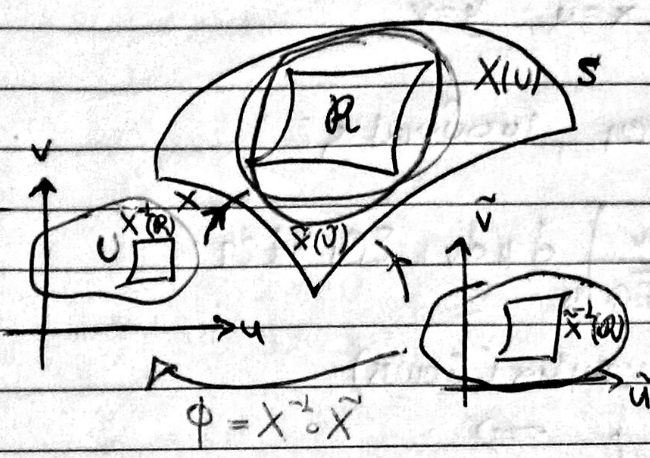
Θεώρημα

Έστω $X:U\to X(U)\subset S$ σύστημα συντεταγμένων με U ομοιομορφικό με τον ανοιχτό δίσκο στο $\mathbb{R}^2$ και $c:[0,l]\to X(U)$ απλή κλειστή κατά τμήματα κανονική

καμπύλη με κορυφές $c(t_0), \dots, c(t_k)$ με εξωτερικές γωνίες $\theta_0, \dots, \theta_k$. Έστω επίσης $\varphi_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}$ η γωνιακή συνάρτηση $\varphi_i = \measuredangle(X_u, c')$.
Τότε ισχύει:

$$\sum_i \left(\varphi_i(t_i) - \varphi_i(t_{i-1})\right) + \sum \theta_i = \pm 2\pi .$$

Ολοκλήρωση σε επιφάνειες:



$R \subset S$

$f : R \to \mathbb{R}$ συνεχής

$$\iint_R f \, d\sigma =: \iint_{X^{-1}(R)} f \circ X(u,v) \, \|X_u \times X_v\| \, du\, dv$$

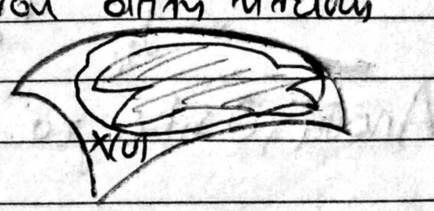
$$= \iint_{\tilde{X}^{-1}(R)} f \circ X \circ \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) \, \|X_u \times X_v\| \cdot \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} \right| d\tilde{u}\, d\tilde{v}$$

$\phi = X^{-1} \circ \tilde{X}$

$\varphi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v)$

Δηλ. είναι ανεξάρτητο της επιλογής του συστήματος συντεταγμένων
Άρα, είναι καλώς ορισμένο

Ορισμός. Ένα $R \subset S$ καλείται απλή περιοχή, αν είναι ομοιομορφική με τον κλειστό δίσκο στο επίπεδο με σύνορο $\partial R = c([0,\ell])$ όπου $c : [0,\ell] \to S$ είναι απλή κλειστή καμπύλη (τμηματικά κανονική)



Θα κάνουμε μια υπόθεση:
$R \subset X(U)$ όπου U ομοιομορφικό με το δίσκο και το ορθογ. σύστημα συντεταγμένων του προσανατολισμού.
Η c έχει παράμετρο το μήκος τόξου

$$\sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\, ds = \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} ds + \overbrace{\sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds}\, ds}^{\sum(\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i))}$$

Θεωρ. στρεφ. εφαπτ. $\Rightarrow$

$$\sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\, ds - \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\{ -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} \right\} ds + \sum_i \theta_i = \pm 2\pi \quad (2)$$

Αφού $\oint_\gamma P\,d\overset{u}{x} + Q\,d\overset{v}{y} = \int_I \left(P(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right) dt$

Τότε, στην (2) έπεται:

$$\sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\,ds - \oint_{x^{-1}(\partial R)} \left(-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\,du + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\,dv\right) + \sum_i \theta_i = \pm 2\pi$$

όπου, κατά πλήρη αντιστοιχία:

$P = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}$ και $Q = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}$, $x=u$, $y=v$

Άρα, από το Θεώρημα του Green, ισοδύναμα:

$$\sum \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\,ds - \iint_{x^{-1}(R)} \left\{\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right)_u\right\} du\,dv + \sum\theta_i = \pm 2\pi$$

Αν $F=0$ τότε από το έξοχο Θεώρημα (Gauss)

$$\underset{\text{καμπυλότητα}}{K\circ X} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right)_v = -K\circ X\sqrt{EG}$$

όμως, $\iint_R f\,d\sigma = \iint_{x^{-1}(R)} f\circ x(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$

Έτσι,

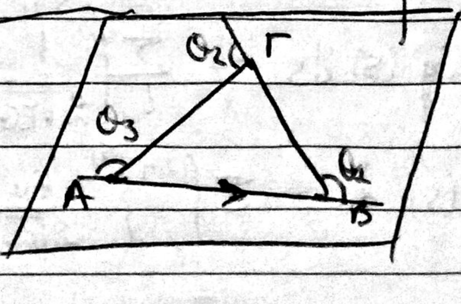
$$\sum \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) + \iint_{x^{-1}(R)} K\circ X\sqrt{EG} + \sum\theta_i = \pm 2\pi$$

Αποδείχθηκε το παρακάτω Θεώρημα

Τοπικό Θεώρημα Gauss-Bonnet

$$\sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\,ds + \iint_R K\,d\sigma + \sum\theta_i = \pm 2\pi$$

πχ



$\theta_1+\theta_2+\theta_3 = 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi-\hat{A}+\pi-\hat{B}+\pi-\hat{\Gamma} = 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = \pi$